Caractérisation des fibrés en droites complexes par leur classe de Chern

Kylian Prigent

17 mars 2026

Introduction

On s'intéresse à la classification des fibrés en droites complexes par leur classe de Chern. On verra que les classes d'isomorphismes de fibrés en droites complexes sont caractérisées par leurs classes de Chern. Pour cela on utilisera la cohomologie de Čech que l'on définit dans un premier temps. Ensuite on s'intéresse à la classification des fibrés en droites. Dans un souci de temps et de simplification, on aura besoin d'admettre quelques résultats classiques de géométrie différentielle comme le théorème de De Rham donnant l'isomorphisme entre les cohomologies de De Rham et de Čech. Le lecteur pourra facilement comprendre pourquoi ce résultat n'est établi que pour des fibrés en droites complexes en voyant apparaître des déterminations complexes du logarithme ainsi que l'utilisation omniprésente de la caractérisation des fibrés en droites par leurs fonctions de transitions ou encore la "taille" des formes de connexion et de courbure qui simplifient les équations de structure et les calculs de cohomologie de De Rham de la forme de Čech.

1 Cohomologie de Čech

1.1 Définitions de base

Soit M une variété différentielle et $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ un recouvrement ouvert contractile de M (toute intersection finie d'ouverts est contractile). On admet l'existence de tels recouvrements.

Définition 1

Une k-cochaîne par rapport à $\mathcal{U}$ est une application

$$\alpha : \begin{array}{ccc} J^{k+1} & \to & \mathbb{R} \\ (j_0,\dots,j_k) & \mapsto & \alpha(j_0,\dots,j_k) \end{array}$$

telle que

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k \qquad \alpha(j_{\sigma(0)},\dots,j_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(j_0,\dots,j_k).$$

On note $\mathcal{C}^k(M,\mathcal{U})$ l'ensemble des k-cochaînes par rapport à $\mathcal{U}$

1.2 Opérateur cobord δ

On peut définir un opérateur cobord $\delta : \mathcal{C}^k(M,\mathcal{U}) \to \mathcal{C}^{k+1}(M,\mathcal{U})$ par :

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^k(M,\mathcal{U}) & \to & \mathcal{C}^{k+1}(M,\mathcal{U}) \\ \alpha & \mapsto & \delta\alpha \end{array}$$

où

$$\delta\alpha(j_0,j_1,\dots,j_{k+1}) = \sum_{l=0}^{k+1}(-1)^l\alpha(j_0,\dots,\hat{j}_l,\dots,j_{k+1}),$$

où $\hat{j}_l$ signifie que l'indice j_l est omis. A partir de maintenant afin d'alléger les écriture on notera :

$$\alpha\left(\widehat{j_l}\right) := \alpha(j_0,\dots,\hat{j}_l,\dots,j_{k+1}).$$

On écrit alors :

$$\delta\alpha(j_0, j_1, \dots, j_{k+1}) = \sum_{l=0}^{k+1} (-1)^l \alpha\left(\widehat{j_l}\right),$$

Proposition 2

L'opérateur de cobord vérifie :

$$\delta^2 = 0$$

Démonstration. Soit une k-cochaîne α. Calculons $\delta^2\alpha$:

$$\delta^2\alpha(j_0, j_1, \dots, j_{k+2}) = \sum_{m=0}^{k+2} (-1)^m \delta\alpha\left(\widehat{j_m}\right).$$

En remplaçant $\delta\alpha$ par sa définition, on obtient :

$$\delta^2\alpha(j_0, j_1, \dots, j_{k+2}) = \sum_{m=0}^{k+2} (-1)^m \left(\sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \alpha\left(\widehat{j_l}, \widehat{j_m}\right) + \sum_{l=m+1}^{k+2} (-1)^{l-1} \alpha\left(\widehat{j_m}, \widehat{j_l}\right) \right).$$

On observe que chaque terme $\alpha\left(\widehat{j_r}, \widehat{j_s}\right)$ apparaît deux fois : lorsque $m = r$ et $l = s$ et lorsque $m = s$ et $l = r$. Il contribuent alors pour (première puis seconde somme)

$$(-1)^{r+s}\alpha\left(\widehat{j_r}, \widehat{j_s}\right) + (-1)^{r+s-1}\alpha\left(\widehat{j_r}, \widehat{j_s}\right) = 0.$$

Ainsi, on a bien $\delta^2\alpha = 0$. □

1.3 Définition d'une cohomologie

La propriété précédente permet de définir des k-cochaînes fermées, exactes et de facto les groupes de cohomologie de Čech :

$$\check{H}^k(M, \mathcal{U}) = \ker(\delta_k)/\mathrm{im}(\delta_{k-1})$$

où l'on a noté $\delta_k : \mathcal{C}^k(M, \mathcal{U}) \to \mathcal{C}^{k+1}(M, \mathcal{U})$.

On admettra la proposition suivante :

Proposition 3

Le groupe de cohomologie $\check{H}^k(M, \mathcal{U})$ ne dépend pas du recouvrement $\mathcal{U}$.

On note alors $\check{H}^k(M, \mathbb{R}) = \check{H}^k(M, \mathcal{U})$.

On admet également le théorème de De Rham :

Théorème 4: De Rham

Il y a un isomorphisme :

$$\check{H}^k(M, \mathbb{R}) \simeq H^k_{dR}(M, \mathbb{R}) = H^k_{dR}(M)$$

1.4 Forme de courbure et cohomologie de Čech

Comme la forme de courbure vérifie $[\Omega] \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$, on a donc aussi $[\Omega] \in \check{H}^2(M, \mathbb{R})$. Si l'on utilise la cohomologie de Čech alors on se donne un recouvrement ouvert contractile de M. Ainsi par le lemme de Poincaré on a que Ω est localement exacte sur chaque ouvert du recouvrement :

$$\Omega_{|U_j} = \mathrm{d}\theta_j$$

avec $(\theta_j)_{j\in J}$ une famille de 1-formes **à priori pas fermées**.
Mais comme Ω est globale, sur $U_j \cap U_k$ on a :

$$\mathrm{d}\theta_j = \Omega = \mathrm{d}\theta_k$$

Ainsi sur $U_j \cap U_k$, les $\theta_j \cap \theta_k$ sont des 1-formes fermées. On leur applique alors le lemme de Poincaré :

$$\theta_j - \theta_k = \mathrm{d}(f_{j,k}).$$

Ainsi les $f_{j,k}$ sont des fonctions lisses sur $U_j \cap U_k$. Sur $U_j \cap U_k \cap U_l$ elles vérifient :

$$\mathrm{d}f_{j,k} + \mathrm{d}f_{k,l} + \mathrm{d}f_{l,j} = (\theta_j - \theta_k) + (\theta_k - \theta_l) + (\theta_l - \theta_j) = 0$$

Ainsi sur chaque $U_j \cap U_k \cap U_l$ on a $f_{j,k} + f_{k,l} + f_{l,j}$ est constante. Si on note $\alpha(j,k,l)$ cette constante, alors on remarque que $\alpha \in \check{H}^2(M,\mathbb{R})$ et ne dépend que de $[\Omega]$ est pas de Ω car si $\widetilde{\Omega}$ est cohomologue à Ω alors on a :

$$\widetilde{\Omega} = \Omega + \mathrm{d}\eta$$

puis

$$\widetilde{\theta_j} = \theta_j + \eta$$

et enfin

$$\mathrm{d}f_{j,k} = \widetilde{\theta_j} - \widetilde{\theta_k} = \theta_j - \theta_k$$

donc $f_{j,k}$ ne dépend pas de η.

Cas particulier d'un fibré en droites Soit $\pi : L \to M$ un fibré en droites et soient ∇ une connexion sur ce fibré et R la courbure associée.
En toute généralité, on a l'équation de structure

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega$$

Où Ω est la forme de courbure et ω est la forme de connexion.
Mais dans le cas d'un fibré en droites on a nécessairement $\omega \wedge \omega = 0$. Ainsi pour un fibré en droites a-t-on toujours :

$$\Omega = \mathrm{d}\omega.$$

Or on dispose aussi (en notant $g_{j,k} : U_j \cap U_k \to \mathbb{C}^*$ les fonctions de transitions) de l'équation de structure :

$$\omega_k = g_{j,k}^{-1}\omega_j g_{j,k} + g_{j,k}^{-1}\mathrm{d}g_{j,k}$$

qui se simplifie **sur un fibré en droites** en :

$$\omega_k = \omega_j + \frac{\mathrm{d}g_{j,k}}{g_{j,k}}$$

On étudie alors que la première classe de Chern qui est représenté par la classe de cohomologie de la 2-forme $\frac{-1}{2i\pi}\Omega$. On étudie cette forme. Cela donne :

$$\frac{-1}{2i\pi}\Omega_{|U_j} = \frac{-1}{2i\pi}\mathrm{d}\omega_{|U_j}$$

puis :

$$\frac{-1}{2i\pi}(\omega_j - \omega_k) = \frac{1}{2i\pi}\frac{\mathrm{d}g_{j,k}}{g_{j,k}} = \mathrm{d}f_{j,k}$$

Ainsi on peut déterminer $\alpha(j,k,l)$. En effet, si on se donne une détermination du logarithme (le fibré est complexe donc les fonctions de transitions sont à valeurs dans $\mathbb{C}^*$) on connait alors une primitive de $f_{j,k}$ et on obtient, puisque les fonctions de transition vérifient la condition de cocycle :

$$\begin{aligned}
\alpha(j,k,l) &= \frac{1}{2i\pi}\left(\log\left(g_{j,k}\right) + \log\left(g_{k,l}\right) + \log\left(g_{l,j}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\log\left(g_{j,k}g_{k,l}g_{l,j}\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\log(1) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \times 2i\pi n \\
&= n
\end{aligned}$$

pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

La construction de α donne, par l'isomorphisme de De Rham, que α représente la classe de Chern du fibré en droites $\pi : L \to M$. On obtient ainsi que la classe de Chern du fibré en droite $\pi : L \to M$ vérifie :

$$c_1(L) \in \check{H}^2(M, \mathbb{Z})$$

2 Classification des Fibrés en Droites

2.1 Théorème de Classification

On rappelle que le groupe de Picard d'une variété M est défini comme le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés en droites. On le note $\mathrm{Pic}(M)$.

Théorème 5: Classification des fibrés en droites complexes

Il existe une bijection :

$$\mathrm{Pic}(M) \cong \check{H}^2(M, \mathbb{Z}).$$

2.2 Preuve du théorème

2.2.1 Well-posedness

Il faut commencer par vérifier que la classe de cohomologie dans $\check{H}^2(M, \mathbb{R})$ que l'on a défini juste avant à partir des fonctions de transitions ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré en droites défini par les fonctions de transition.

Soient L_1 et L_2 deux fibrés en droites isomorphes. On note $\left(g_{j,k}^{(1)}\right)_{j,k}$ et $\left(g_{j,k}^{(2)}\right)_{j,k}$ leurs fonctions de transitions (qui définissent les fibrés L_1 et L_2). On a vu en cours que L_1 et L_2 sont isomorphes si et seulement si les fonctions de transition satisfont

$$g_{j,k}^{(2)} = \varphi_j \cdot g_{j,k}^{(1)} \cdot \varphi_k^{-1}$$

pour des "fonctions" $\varphi_j \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. C'est-à-dire :

$$g_{j,k}^{(2)} = \frac{\varphi_j}{\varphi_k^{-1}} g_{j,k}^{(1)}$$

(sur $U_j \cap U_k$ bien entendu).

Regardons alors ce que donnent les calculs :

$$\begin{aligned}
\alpha^{(2)}(j,k,l) &= \frac{1}{2i\pi}\left(\log g_{j,k}^{(2)} + \log g_{k,l}^{(2)} + \log g_{l,j}^{(2)}\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\left(\log\left(\varphi_j \cdot g_{j,k}^{(1)} \cdot \varphi_k^{-1}\right) + \log\left(\varphi_k \cdot g_{k,l}^{(1)} \cdot \varphi_l^{-1}\right) + \log\left(\varphi_l \cdot g_{l,j}^{(1)} \cdot \varphi_j^{-1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\left(\log(\varphi_j) + \log\left(g_{j,k}^{(1)}\right) - \log(\varphi_k) + \log(\varphi_k) + \log\left(g_{k,l}^{(1)}\right) - \log(\varphi_l) + \log(\varphi_l) + \log\left(g_{l,j}^{(1)}\right) - \log(\varphi_j)\right) \\
&= \alpha^{(1)}(j,k,l)
\end{aligned}$$

On a ainsi montrer que la classe de cohomologie définie précédemment ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré en droites.
Ainsi l'application :

$$a : \begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(M) & \to & \check{H}^2(M, \mathbb{Z}) \\ (L) & \mapsto & [\alpha] \end{array}$$

où α est définie comme précédemment, est bien définie.

2.2.2 Preuve de la bijection

— **Surjectivité** : Soit $[\alpha] \in \check{H}^2(M,\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert localement finie de M. On considère $(\rho_j)_{j\in J}$ une partition de l'unité associée à $\mathcal{U}$. Alors on pose :

$$f_{j,k} = \sum_{m\in J} \alpha(j,k,m)\rho_m.$$

Comme α est une 2-chaîne elle vérifie $\alpha(j,k,l) = \varepsilon((k\ l\ j))\alpha(k,l,j) = \alpha(k,l,j)$ etc ; et ainsi $f_{j,k}$ est une fonction lisse bien définie pour tout couple (j,k).
On pose également :

$$g_{j,k} = \exp(2i\pi f_{j,k}) : U_j \cap U_k \to \mathbb{C}^*$$

On va montrer quelles vérifient la condition de cocycle. Ainsi ces fonctions seront des fonctions de transition définissant un fibré en droites et on aura la surjectivité de l'application a.
La condition de cocycle s'écrit :

$$g_{j,k}g_{k,l}g_{l,j} = \exp\left(2i\pi\left(f_{j,k}+f_{k,l}+f_{l,j}\right)\right)$$

Pour montrer que les fonctions $g_{j,k}$ vérifient la condition de cocycle, il suffit de montrer que $f_{j,k}+f_{k,l}+f_{l,j} \in \mathbb{Z}$.
Mais c'est la cas car $\delta\alpha = 0$. En effet sur $U_j \cap U_k \cap U_l$ on a :
pour tout $m \in J$: $0 = \delta\alpha(j,k,l,m) = \alpha(k,l,m) - \alpha(j,l,m) + \alpha(j,k,m) - \alpha(j,k,l)$ c'est-à-dire :

$$\forall m \in J \quad \alpha(j,k,l) = \alpha(k,l,m) + \alpha(l,j,m) + \alpha(j,k,m)$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
f_{j,k}+f_{k,l}+f_{l,j} &= \sum_{m\in J}\alpha(j,k,m)\rho_m + \sum_{m\in J}\alpha(k,l,m)\rho_m + \sum_{m\in J}\alpha(l,j,m)\rho_m \\
&= \alpha(j,k,l)\left(\rho_j+\rho_k+\rho_l\right) + \sum_{m\in J\setminus\{j,k,l\}}\left(\alpha(k,l,m)+\alpha(l,j,m)+\alpha(j,k,m)\right)\rho_m \\
&= \alpha(j,k,l)\left(\rho_j+\rho_k+\rho_l\right) + \sum_{m\in J\setminus\{j,k,l\}}\alpha(j,k,l)\rho_m \\
&= \alpha(j,k,l)\underbrace{\sum_{m\in J}\rho_m}_{=1} \\
&= \alpha(j,k,l) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Toute classe $[\alpha] \in \check{H}^2(M,\mathbb{Z})$ définit un fibré en droites via des fonctions de transition

$$g_{jk} = \exp(2i\pi f_{jk}).$$

— **Injectivité** : Soient L_1 et L_2 deux fibrés fibrés en droites. On note $\left(g^{(1)}_{j,k}\right)_{j,k}$ et $\left(g^{(2)}_{j,k}\right)_{j,k}$ leurs fonctions de transition (qui définissent les fibrés L_1 et L_2).
On suppose que $a([L_1]) = a([L_2])$. Montrons que $[L_1] = [L_2]$, c'est-à-dire que leurs fonctions de transitions vérifient :

$$g^{(2)}_{j,k} = \varphi_j \cdot g^{(1)}_{j,k} \cdot \varphi_k^{-1}$$

pour des "fonctions" $\varphi_j \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. C'est-à-dire :

$$g^{(2)}_{j,k} = \frac{\varphi_j}{\varphi_k^{-1}} g^{(1)}_{j,k}.$$

On définit

$$v^{(r)}_{j,k} = \frac{1}{2i\pi}\log\left(g^{(r)}_{j,k}\right) \quad \text{pour} \quad r = 1,2.$$

On pose $v_{j,k} = v^{(1)}_{j,k} - v^{(2)}_{j,k}$. Mais comme $a([L_1]) = a([L_2])$, alors on a $v_{j,k}+v_{k,l}+v_{l,j} = 0$. Par conséquent, nous pouvons définir sur U_j

$$\beta_j = \sum_{l\in J} v_{l,j}\rho_l$$

qui se réécrit avec ce qui précède (page 3) :

$$\beta_j = \sum_{l \in J} \left(f_{l,j}^{(2)} - f_{l,j}^{(1)} \right) \rho_l$$

Alors en utilisant les partitions de l'unit et le fait que $v_{j,k} + v_{k,l} + v_{l,j} = 0$, on obtient

$$\beta_j - \beta_k = f_{j,k}^{(2)} - f_{j,k}^{(1)}.$$

Pour conclure, il suffit de poser $\varphi_j = \exp(2i\pi\beta_j)$, et on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\varphi_j g_{j,k}^{(1)} \varphi_k^{-1} &= \exp(2i\pi\beta_j) g_{j,k}^{(1)} \exp(-2i\pi\beta_k) \\
&= \exp(2i\pi(\beta_j - \beta_k)) g_{j,k}^{(1)} \\
&= \exp(2i\pi \left(f_{j,k}^{(2)} - f_{j,k}^{(1)} \right)) g_{j,k}^{(1)} \\
&= g_{j,k}^{(2)} (g_{j,k}^{(1)})^{-1} g_{j,k}^{(1)} \\
&= g_{j,k}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $[L_1] = [L_2]$ et donc l'application a est injective.
Au total on a donc démontrer que l'application :

$$a : \begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(M) & \to & \check{H}^2(M, \mathbb{Z}) \\ (L) & \mapsto & [\alpha] \end{array}$$

est une bijection. Ainsi les classes d'isomorphismes de fibrés en droites sont caractérisées par leur (première) classe de Chern. $\square$